En plus du devoir ci-dessous, réviser les bases vues en première année .
En particulier: il y aura des colles de maths sur le chapitre "calcul intégral sur un segment " dès les premiers jours de la rentrée.

DM DE VACANCES été 2022

INTÉGRALES IMPROPRES ET RÉVISIONS D'ANALYSE

PROBLÈME (d'après EM LYON)

On définit la fonction réelle H d'une variable réelle x par : $H(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^x}\mathrm{d}t$.

Dans tout le problème, I désigne l'intervalle $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$.

PARTIE I : Premières propriétés de la fonction H

1. Justifier que la fonction H est définie sur I.
2. Montrer que H est décroissante sur I.
3. (a) Calculer $H(1)$.

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer, à l'aide dune intégration par parties : $H(n) = 2n(H(n) - H(n+1))$. En déduire une expression de $H(n+1)$ en fonction de n et de $H(n)$.

   (c) Écrire un script Python d'une fonction notée `H`, qui, étant donné un entier n de $\mathbb{N}^*$, renvoie la valeur de $H(n)$.

   (d) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ H(n) = \dfrac{(2n-2)!\pi}{2^{2n-1}\Big((n-1)!\Big)^2}$.

PARTIE II : Étude de $H(x)$ lorsque x tend vers $\frac{1}{2}$

4. (a) Montrer que la fonction $\varphi : u \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^u - \mathrm{e}^{-u}}{2}$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. Préciser $\varphi^{-1}(0)$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} \varphi^{-1}(t)$.

   (b) A l'aide du changement de variables $t = \varphi(u)$, montrer :

$$\forall x \in I,\ H(x) = \frac{4^x}{2}\int_0^{+\infty} \frac{1}{(\mathrm{e}^u + \mathrm{e}^{-u})^{2x-1}}\mathrm{d}u.$$

5. (a) Justifier : $\forall u \in [0;+\infty[,\ \mathrm{e}^u \leqslant \mathrm{e}^u + \mathrm{e}^{-u} \leqslant 2\mathrm{e}^u$.

   (b) En déduire : $\forall x \in I,\ \dfrac{1}{2x-1} \leqslant H(x) \leqslant \dfrac{4^x}{2(2x-1)}$.

6. Déterminer la limite de H en $\frac{1}{2}$ et un équivalent simple de $H(x)$ lorsque x tend vers $\frac{1}{2}$.

PARTIE III : Étude de $H(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$

7. (a) Montrer : $\quad \forall u \in [0;1],\ \ln(1+u) \geqslant \frac{u}{2}$.

   On admet que, pour tout x de I, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt^2/2}dt$ *converge et et vaut* $\displaystyle\sqrt{\frac{\pi}{2x}}$

   (b) En déduire : $\quad \displaystyle\forall x \in I,\ 0 \leqslant \int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^x}\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 \mathrm{e}^{-xt^2/2}\mathrm{d}t \leqslant \sqrt{\frac{\pi}{2x}}$.

   (c) Montrer : $\quad \displaystyle\forall x \in I,\ 0 \leqslant \int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^x}\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{2x-1}$.

   (d) En déduire la limite de H en $+\infty$.

8. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \ln\big(H(n)\big) + \dfrac{\ln(n)}{2}$.

   (a) Déterminer un équivalent simple de $u_{n+1} - u_n$ lorsque l'entier n tend vers $+\infty$. On pourra utiliser le résultat obtenu à la question **3.b.**

   (b) Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}(u_{n+1} - u_n)$ converge.

   (c) En déduire l'existence d'un réel K strictement positif tel que : $\quad \displaystyle H(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{K}{\sqrt{n}}$.

9. Donner enfin un équivalent simple de $H(x)$ lorsque le réel x tend vers $+\infty$ à l'aide de K.

PARTIE IV : Étude d'une suite de fonctions

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\quad \forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \dfrac{2}{\pi(1+t^2)} & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$

10. Montrer que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ converge et qu'elle vaut 1.

11. On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

   Déterminer, pour x réel, $F(x)$ en fonction de x.

12. Déterminer la nature de l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt$.

13. On définit, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, la fonction G_n définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad G_n(x) = 1 - \left(F\left(\frac{n}{x}\right)\right)^n$$

   (a) Justifier : $\quad \forall u \in]0;+\infty[, \quad \mathrm{Arctan}(u) + \mathrm{Arctan}\left(\dfrac{1}{u}\right) = \dfrac{\pi}{2}$

   (b) Montrer alors, pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $\forall x \in]0;+\infty[,\ G_n(x) = 1 - \left(1 - \dfrac{2}{\pi}\mathrm{Arctan}\left(\dfrac{x}{n}\right)\right)^n$.

   (c) En déduire que pour $x \in]0,+\infty[$, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} G_n(x) = 1 - e^{-\frac{2}{\pi}x}$$